УДК 538.3:001.5

Соотношения параметров и некоторые закономерности в электродинамике

(статья М. А. Панасенкова, «Электричество», 1991, № 8)

АБРАМКИН Ю. В., канд. техн. наук

В рецензируемой статье преследуется цель популяризации предложенной в 1913 г. В. К. Аркадьевым симметричной системы уравнений электромагнитного поля (ЭМП), к которой при определенных допущениях (см. приложение) сводится общеизвестная система уравнений ЭМП Максвелла.

Судя по содержанию статьи, ее автор не сумел добиться поставленной цели. Такой вывод подтверждается тем, что в основу последующих выводов автор рецензируемой статьи положил свою явно ошибочную систему уравнений ЭМП (1) и (2), необоснованно полагая ее адекватной симметричной системе уравнений ЭМП В. К. Аркадьева (см. приложение). Еще один существенный недостаток рецензируемой работы связан с отсутствием в ней конкретных зависимостей (хотя бы с точностью до постоянных интеграции) для векторных функций напряженностей электрического и магнитного полей: $\bar{E}(x, y, z, t)$ и $\bar{H}(x, y, z, t)$. Вместе с тем автор приводит в статье ряд соотношений, например для волнового сопротивления (12); дивергенции вектора Пойнтинга (8) и др., происхождение которых нельзя признать физически обоснованным без указания упомянутых выше зависимостей для напряженностей $\bar{E}(x, y, z, t)$ и $\bar{H}(x, y, z, t)$.

Наконец, в процессе анализа ошибочной системы уравнений (1) и (2) [а также вытекающей из нее системы уравнений (3) и (4)] и установления на его основе отдельных закономерностей в электродинамике, специфических соотношений в макро- и микромирах автор опирается на другие ошибочные закономерности и соотношения, приведенные в его ранее опубликованных работах и подвергнутые детальному критическому анализу в сообщении А. В. Иванова-Смоленского (см. «Изв. вузов. Электромеханика», 1973, № 4, с. 457—458).

Приложение. Автор рецензируемой статьи предлагает следующую систему дифференциальных уравнений (с учетом принятых в статье символических обозначений):

$$\operatorname{rot} \bar{H}_t=\varepsilon_1\Omega\bar{E}_t+\varepsilon_2\frac{\partial\bar{E}_t}{\partial t}; \qquad (1)$$

$$-\operatorname{rot} \bar{E}_t=\mu_1\Omega\bar{H}_t+\mu_2\frac{\partial\bar{H}_t}{\partial t}, \qquad (2)$$

или в комплексной форме:

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}=\varepsilon_1\Omega\dot{\bar{E}}-i\varepsilon_2\Omega\dot{\bar{E}}=\tilde{\gamma}_э\dot{\bar{E}}; \qquad (3)$$

$$-\operatorname{rot} E=\mu_1\Omega\bar{H}-i\mu_2\Omega\bar{H}=\tilde{\eta}_э\dot{H}, \qquad (4)$$

где $\Omega=c/a$, c — скорость света в вакууме; a — введенный автором рецензируемой статьи так называемый радиус вихря ЭМП (в теории ЭМП со времен Максвелла и до настоящего времени это понятие не встречалось); $\varepsilon_1=\operatorname{Re}\tilde{\varepsilon}_э$; $\varepsilon_2=-\operatorname{Im}\tilde{\varepsilon}_э$; $\tilde{\varepsilon}_э=\varepsilon_1-i\varepsilon_2$; $\mu_1=\operatorname{Re}\tilde{\mu}_э$; $\mu_2=-\operatorname{Im}\tilde{\mu}_э$; $\tilde{\mu}_э=\mu_1-i\mu_2$.

Нетрудно убедиться в том, что уравнения (1) и (2) не адекватны соответствующим уравнениям ЭМП В. К. Аркадьева, которые в зависимости от применяемой системы единиц могут представлены в следующем виде:

1) при применении гауссовой системы единиц

$$\operatorname{rot} \bar{H}=(4\pi/c)\sigma\bar{E}+(\varepsilon/c)\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}; \qquad (а)$$

$$-\operatorname{rot} \bar{E}=(4\pi/c)\rho\bar{H}+(\mu/c)\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}; \qquad (б)$$

2) при применении международной системы единиц (СИ)

$$\operatorname{rot} \bar{H}=\sigma\bar{E}+\varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}; \qquad (А)$$

$$-\operatorname{rot} \bar{E}=\rho\bar{H}+\mu\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} \qquad (Б)$$

(и были впервые предложены В. К. Аркадьевым при описании электромагнитных процессов в однородной и изотропной среде, диэлектрические и магнитные свойства которой характеризуются следующими четырьмя постоянными, не зависящими от самого ЭМП параметрами: σ, ε, μ, ρ).

Здесь и далее обозначения сохранены такими, какие были приняты В. К. Аркадьевым в опубликованных им работах [1—2]. При этом физическое содержание величин σ, ε, μ, ρ либо очевидно, либо может быть установлено путем анализа простых, приводимых ниже определений: ε — диэлектрическая проницаемость при отсутствии запаздывания электрической индукции от напряженности электрического поля; σ — удельная электрическая проводимость; ρ — введенная В. К. Аркадьевым специфическая удельная магнитная проводимость для так называемого магнитного тока смещения (см. далее), связанная с так называемой консумптивной магнитной проницаемостью ρ' и круговой частотой $\omega=2\pi f=2\pi(1/T)$ простым соотношением $\rho=\rho'\omega$, обоснование которого будет приведено далее; μ — консервативная магнитная проницаемость; μ_m — амплитудная магнитная проницаемость; β — угол, определяющий отставание вектора магнитной индукции от вектора напряженности магнитного поля вследствие магнитной вязкости [от этого параметра во многом зависит и форма эллипсоидальной кривой намагничивания $B(H)$]; $\tilde{\mu}$ — комплексная магнитная проницаемость, связанная с указанными выше параметрами μ, ρ', μ_m, β очевидным соотношением

$$\tilde{\mu}=\mu-i\rho'=\mu_m e^{-i\beta}=\mu_m\cos\beta-i\mu_m\sin\beta.$$

Рассмотрим теперь сам процесс преобразования исходной системы уравнений ЭМП Максвелла (А) и (Б) к симметричной системе уравнений В. К. Аркадьева при условии

$$\varepsilon=\mathrm{const}\neq f(\bar{E});\ \ \varepsilon\neq f_3(x, y, z);$$
$$\tilde{\mu}=\mu-i\rho'=\mathrm{const}\neq f_2(\bar{H});\ \ \tilde{\mu}\neq f_4(x, y, z)$$

и заданной зависимости изменения во времени векторной функции напряженности магнитного поля

$$\bar{H}(t)=\bar{H}_m\cos(\omega t+\varphi_н)=\operatorname{Re}\{\dot{\bar{H}}_m e^{i\omega t}\},$$

где φ — начальная фаза; $\dot{\bar{H}}_m=\bar{H}_m e^{i\varphi_н}$.

С учетом запаздывания магнитной индукции (из-за гистерезиса) от напряженности общее выражение для векторной функции магнитной индукции в зависимости от времени может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{B}(t)=\bar{B}_m\cos(\omega t+\varphi_н-\beta)=\mu_m\bar{H}_m\cos(\omega t+\varphi_н-\beta)=$$
$$=\operatorname{Re}\{\mu_m\dot{\bar{H}}_m e^{i(\omega t-\beta)}\}=\operatorname{Re}\{(\mu_m e^{-i\beta})\dot{\bar{H}}_m e^{i\omega t}\}=\operatorname{Re}\{\tilde{\mu}\dot{\bar{H}}_m e^{i\omega t}\}=$$
$$=(\mu_m\cos\beta)\bar{H}_m\cos(\omega t+\varphi_н)+(\mu_m\sin\beta)\bar{H}_m\sin(\omega t+\varphi_н)=$$
$$=\mu\bar{H}_m\cos(\omega t+\varphi_н)+\rho'\bar{H}_m\sin(\omega t+\varphi_н),$$

откуда следует искомое общее выражение для так называемой объемной плотности тока магнитного смещения $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ (по аналогии с объемной плотностью тока электрического смещения $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$):

$$\bar{J}_m=\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}=\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}+\rho'\omega\bar{H}=\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}+\rho\bar{H}.$$

Анализ последнего уравнения позволяет выявить физический смысл введенного В. К. Аркадьевым коэффициента $\rho=\rho'\omega$, получившего название удельной магнитной проводимости (по аналогии с удельной электрической проводимостью σ): этот коэффициент учитывает обусловленное гистерезисом так называемое магнитное последействие, проявляющееся в том, что скорость изменения магнитной индукции $\partial\bar{B}/\partial t$ или, по В. К. Аркадьеву, объемная плотность тока магнитного смещения ($J_м$) оказывается отличной от нуля в тот момент времени, когда напряженность магнитного поля достигает своего максимального значения (экстремального), а производная $\partial\bar{H}/\partial t$ обращается в нуль. В тот же момент времени вихрь

$$-\operatorname{rot}\bar{E}=\rho\bar{H}\neq 0.$$

Таким образом, действительно, второе уравнение Максвелла при принятых выше ограничениях на исследуемое ЭМП, преобразуется к виду

$$-\operatorname{rot}\bar{E}=\mu\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}+\rho\bar{H},$$

вполне симметричному (с точностью до знака) первому уравнению Максвелла. При этом, однако, следует иметь в виду, что за внешней симметрией уравнений Аркадьева вскрывается глубоко своеобразное физическое содержание коэффициентов σ и ρ.

При эллипсоидальной кривой поляризации диэлектрика $\bar{P}(\bar{E})$ под коэффициентом σ в уравнении Максвелла (A) следует понимать сумму «истинной удельной электрической проводимости» σ' и так называемой удельной электрической проводимости поляризации σ'', т. е. $\sigma=\sigma'+\sigma''$. При этом $\sigma''=g\omega$, где $g=-I_m\dot{\varepsilon}$ — так называемая консумптивная диэлектрическая проницаемость; $\dot{\varepsilon}=\varepsilon-ig$ — комплексная диэлектрическая проницаемость; ε — консервативная диэлектрическая проницаемость.

В то же время «истинной удельной магнитной проводимости» (аналога удельной электрической проводимости σ') в природе не существует и введенная В. К. Аркадьевым удельная магнитная проводимость ρ есть не что иное как магнитная проводимость поляризации и возникает только в ферромагнитных телах, в которых кривая намагничивания $B(H)$ либо имеет форму эллипса, либо может быть условно заменена эллипсоидальной кривой намагничивания. При отсутствии гистерезиса коэффициент ρ, разумеется, следует принять равным нулю.

Естественно, что симметричная система уравнений Максвелла, записанная для мгновенных значений физических величин $\bar{E}$, $\bar{H}$, $\bar{D}$, $\bar{B}$ (с учетом упомянутых выше ограничений, наложенных на ЭМП) может быть представлена также и в комплексной форме:

$$i\omega\varepsilon\dot{\bar{E}}+\sigma\dot{\bar{E}}=\operatorname{rot}\dot{\bar{H}}; \qquad (\dot{A})$$

$$i\omega\mu\dot{\bar{H}}+\rho\dot{\bar{H}}=-\operatorname{rot}\dot{\bar{E}} \qquad (\dot{B})$$

или, учитывая приведенные выше соотношения ($\rho=\rho'\omega$; $\tilde{\mu}=\mu-i\rho'$)

$$i\omega\varepsilon\dot{\bar{E}}+\sigma\dot{\bar{E}}=\operatorname{rot}\dot{\bar{H}};$$

$$i\omega\tilde{\mu}\dot{\bar{H}}=-\operatorname{rot}\dot{\bar{E}},$$

где первое уравнение в том случае, если диэлектрические свойства среды характеризуются диэлектрической комплексной проницаемостью

$$\dot{\varepsilon}=\varepsilon-i\varepsilon',$$

может быть последовательно преобразовано следующим образом:

$$(i\omega\dot{\varepsilon}+\sigma)\dot{\bar{E}}=\operatorname{rot}\dot{\bar{H}},$$

или

$$i\omega\left(\dot{\varepsilon}-i\frac{\sigma}{\omega}\right)\dot{\bar{E}}=\operatorname{rot}\dot{\bar{H}},$$

или

$$i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\bar{E}}=\operatorname{rot}\dot{\bar{H}},$$

где $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon-i(\sigma/\omega+\varepsilon')$.

В итоге получаем симметричную систему уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\operatorname{rot}\dot{\bar{H}}=i\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\bar{E}}; \qquad (A1)$$

$$-\operatorname{rot}\dot{\bar{E}}=i\omega\tilde{\mu}\dot{\bar{H}}, \qquad (B1)$$

которая сводится к любому из двух, приводимых ниже, волновых однородных уравнений (называемых уравнениями Гельмгольца) относительно векторных функций напряженностей электрического ($\bar{E}$) и магнитного ($\bar{H}$) полей:

$$\nabla^2\dot{\bar{H}}+\dot{k}^2\dot{\bar{H}}=0; \qquad (C)$$

$$\nabla^2\dot{\bar{E}}+\dot{k}^2\dot{\bar{E}}=0, \qquad (D)$$

где $\dot{k}^2=\omega^2\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}$ — так называемое волновое число.

Однородные волновые уравнения Гельмгольца (С) и (D) подробно исследованы во многих руководствах по теории ЭМП и, в частности, в учебном пособии [3].

Сопоставление системы уравнений В. К. Аркадьева (А) и (Б) [или (а) и (б)] с предложенными в рецензируемой статье системами (1) и (2) и их комплексных аналогов позволяет сделать вполне однозначный вывод о том, что рекомендуемая автором обсуждаемой статьи система уравнений (1) и (2) явно противоречит системе уравнений В. К. Аркадьева (А) и (Б) и адекватным им (в комплексной форме) уравнениям (А1) и (В1). В частности, описываемые последними электромагнитные процессы определяются физически очевидным параметром: круговой частотой $\omega=2\pi f$, в то время как в уравнениях (1) и (2) этот параметр оказывается необоснованно замененным не имеющим физического смысла параметром Ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **В. К. Аркадьев.** Электромагнитные процессы в металлах. Ч. 2. Электромагнитное поле.— М.—Л.: ОНТИ НКТП, 1936.— 304 с.

2. **Arkadiew W.** Berechnung der Permeabilitat und der Verluste in Ferromagn etischhen Blechen bei beliebiger Frequenz.— Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, 1933, Bd 3, H. I.

3. **Никольский В. В.** Теория электромагнитного поля.— М.: Госэнергоиздат, 1961.— 372 с.

В этой статье автор — М. А. Панасенков дает свое толкование некоторых электродинамических соотношений. Имеющиеся в работе неточности и ошибки заставляют выступить с критическими замечаниями.

1. *Симметричная форма записи уравнений Максвелла.* Известная монография В. К. Аркадьева [1] была первой книгой, в которой вводилось понятие комплексной магнитной проницаемости μ. Поэтому В. К. Аркадьев уделил особое внимание доказательству того, что именно мнимая (консумптивная) составляющая ρ' ($\underline{\mu}=\mu-j\rho'$) определяет магнитные потери в веществе. Одним из способов такого доказательства является запись уравнений Максвелла в таком виде, что ρ' занимает в одном уравнении то же место, что электрическая проводимость σ в другом. Повторим вывод В. К. Аркадьева, пользуясь современной методикой и обозначениями (замечу, что в [1] вводятся понятия комплексных проницаемостей $\underline{\varepsilon}=\varepsilon_1-j\varepsilon_2$, $\underline{\mu}=\mu_1-j\mu_2$, но не применяются комплексные представления синусоидально изменяющихся компонент векторов электромагнитного поля). Запишем уравнения Максвелла в комплексной форме для комплексных векторов поля. Комплексный вектор изображает пространственный вектор, каждая составляющая которого изменяется во времени по синусоидальному закону со своей амплитудой и фазой и угловой частотой ω:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}=\dot{\mathbf{J}}+j\omega\dot{\mathbf{D}}; \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\dot{\mathbf{B}}. \tag{2}$$

Уравнения связи между векторами для линейной изотропной среды:

$$\dot{\mathbf{J}}=\sigma\dot{\mathbf{E}},\quad \dot{\mathbf{D}}=\varepsilon_0\underline{\varepsilon}\,\dot{\mathbf{E}},\quad \dot{\mathbf{B}}=\mu_0\underline{\mu}\,\dot{\mathbf{H}}. \tag{3}$$

Подставляя их в (1) и (2) получаем:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}=(\sigma+\omega\varepsilon_0\varepsilon_2)\dot{\mathbf{E}}+j\omega\varepsilon_0\varepsilon_1\dot{\mathbf{E}}; \tag{4}$$

$$-\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{E}}=\omega\mu_0\mu_2\dot{\mathbf{H}}+j\omega\mu_0\mu_1\dot{\mathbf{E}}. \tag{5}$$

Возвращаясь к уравнениям для мгновенных значений, получаем:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=(\sigma+\omega\varepsilon_0\varepsilon_2)\mathbf{E}+\varepsilon_0\varepsilon_1\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}; \tag{6}$$

$$-\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\omega\mu_0\mu_2\mathbf{H}+\mu_0\mu_1\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{7}$$

В. К. Аркадьев записывает эти уравнения так:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}; \tag{8}$$

$$-\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\rho\mathbf{H}+\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \tag{9}$$

т. е. по Аркадьеву: $\varepsilon_0=\mu_0=1/4\pi$, $\varepsilon_2=0$, $\rho=\mu_2/2T$, где T — период колебаний.

Замечу, что запись уравнений в статье М. А. Панасенкова отличается от (6) и (7), во-первых, отсутствием σ, во-вторых, неправильными индексами у компонент $\underline{\varepsilon}$ и $\underline{\mu}$ и, в-третьих, непонятным термином: «Ω — угловая скорость их (векторов поля.— Я. К.) вращения. ... $\Omega=c/a$, где a — радиус вихря ЭМП.»?!

2. *Теорема Пойнтинга и движение энергии.* Из (4) и (5) обычным путем [2] получим выражение для дивергенции вектора Пойнтинга:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{\Pi}=-\mathrm{div}\,(\dot{\mathbf{E}}\times\overset{*}{\mathbf{H}})=(\sigma+\omega\varepsilon_0\varepsilon_2)E^2+\omega\mu_0\mu_2H^2+ +j\omega(\mu_0\mu_1H^2-\varepsilon_0\varepsilon_1E^2). \tag{10}$$

В (10) первые два слагаемых в правой части равенства определяют потери, а третье — изменение энергии электромагнитного поля. Таким образом тепловые потери в среде определяются σ, ε_2 и μ_2.

Из (4) и (5) получим уравнение распространения для $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}}=\gamma^2\dot{\mathbf{H}}, \tag{11}$$

где $\gamma=\alpha+j\beta$ — постоянная распространения;

$$\gamma^2=-\frac{\omega^2}{c^2}[\mu_1\varepsilon_1-\mu_2(\varepsilon_2+\sigma/\omega\varepsilon_0)+j(\mu_2\varepsilon_1+ +\mu_1\{\varepsilon_2+\sigma/\omega\varepsilon_0\})]. \tag{12}$$

Подставив выражение для γ в (12) и решив комплексное уравнение, найдем следующие выражения для α и β:

$$\alpha=\frac{\omega\sqrt{|\mu|\cdot|\varepsilon_э|}}{c}\sin\frac{\delta_\mu+\delta_{\varepsilon э}}{2}; \tag{13}$$

$$\beta=\frac{\omega\sqrt{|\mu|\cdot|\varepsilon_э|}}{c}\cos\frac{\delta_\mu+\delta_{\varepsilon э}}{2}, \tag{14}$$

где $\varepsilon_э=\varepsilon_1-j(\varepsilon_2+\sigma/\omega\varepsilon_0)$ — эквивалентная комплексная диэлектрическая проницаемость; $|\mu|$ и $|\varepsilon_э|$ — модули комплексных проницаемостей; δ_μ, $\delta_{\varepsilon э}$ — их аргументы; $\mathrm{tg}\,\delta_\mu=\mu_2/\mu_1$, $\mathrm{tg}\,\delta_{\varepsilon_э}=(\sigma+ +\omega\varepsilon_0\varepsilon_2)/\omega\varepsilon_0\varepsilon_1$; $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Одно из решений (11) для плоской поперечной волны:

$$\dot{\mathbf{H}}=\mathbf{y}^0H_0e^{-\gamma z};$$

тогда

$$\dot{\mathbf{E}}=\frac{1}{\sigma_э}\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}}=\mathbf{x}^0\frac{\gamma}{\sigma_э}H_0e^{-\gamma z},$$

где $\sigma_э=\sigma+\omega\varepsilon_0\varepsilon_2+j\omega\varepsilon_0\varepsilon_1$.

Таким образом для плоской поперечной электромагнитной волны имеем:

$$\dot{H}=\dot{H}_y=H_0e^{-\gamma z}; \tag{15}$$

$$\dot{E}=\dot{E}_x=Z_cH_0e^{-\gamma z}, \tag{16}$$

где $Z_c=\gamma/\sigma_э=Z_{c\,0}\sqrt{\underline{\mu}/\underline{\varepsilon}_э}=z_c\angle\theta$; Z_c — комплексное характеристическое сопротивление среды; $Z_{c\,0}=120\,\pi$ Ом — характеристическое (волновое) сопротивление вакуума; $z_c=Z_{c\,0}\sqrt{|\mu|/|\varepsilon_э|}$, $\theta=(\delta_\mu-\delta_{\varepsilon э})/2$ — модуль и аргумент характеристического сопротивления среды.

Мгновенные значения векторов электромагнитного поля:

$$H_y=H_0e^{-\alpha z}\sin(\omega t-\beta z); \tag{17}$$

$$E_x=z_cH_0e^{-\alpha z}\sin(\omega t+\theta-\beta z). \tag{18}$$

При неравенстве углов δ_μ и $\delta_{\varepsilon э}$ векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ сдвинуты по фазе (во времени) на угол θ.

Плотности объемных энергий магнитного и электрического полей:

$$W_м=\mu_0\mu_1H_0^2e^{-2\alpha z}\sin^2(\omega t-\beta z); \tag{19}$$

$$w_э=\varepsilon_0\varepsilon_1z_c^2H_0^2e^{-2\alpha z}\sin^2(\omega t+\theta-\beta z). \tag{20}$$

Отношение максимальных значений этих плотностей:

$$w_{э\,max}/w_{м\,max}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1E_{xm}^2}{\mu_0\mu_1H_{ym}^2}=\cos\delta_{\varepsilon э}/\cos\delta_\mu. \tag{21}$$

Максимальные значения плотностей энергий электрического и магнитного полей равны либо в среде без потерь ($\delta_\mu=\delta_{\varepsilon э}=0$), либо при равенстве углов потерь δ_μ и $\delta_{\varepsilon э}$, но последнее практически не встречается. У диэлектриков $\mu=1$, $\delta_\mu=0$, а $\varepsilon_1\approx2$—4, $\delta_{\varepsilon э}\approx\approx(2$—$4)\cdot10^{-4}$ при $f=1$ МГц [3]. Единственный материал, у которого значения $\underline{\mu}$ и $\underline{\varepsilon}$ одновременно отличны от единицы, а значение $\tilde{\delta}$ мало — феррит. При исследовании никель-цинкового феррита на частоте около $3\cdot10^9$ Гц получено [4]:

$\underline{\mu}=0{,}95-j\,1{,}4=1{,}69\angle-55{,}8°$; $\underline{\varepsilon}=5{,}8-j\,0{,}17=5{,}8\angle-1{,}7°$, следовательно $Z_c=\overline{203}\angle-27°$ Ом; $\gamma=\alpha+j\beta=0{,}92+j\,1{,}68$ см$^{-1}$.

Утверждение М. А. Панасенкова о равенстве углов потерь $\delta_\mu=\delta_\varepsilon\approx30°$ — очевидно недоразумение.

Мгновенное значение вектора Пойнтинга:

$$\Pi_z=E_xH_y=z_cH_0^2e^{-2\alpha z}\sin(\omega t+\theta-\beta z)\sin(\omega t-\beta z)=$$

$$=\frac{z_cH_0^2}{2}e^{-2\alpha z}[\cos\theta-\cos(2\omega t+\theta-2\beta z)]. \quad (22)$$

В общем случае при $\theta\neq0$ мгновенное значение Π_z меняет знак, т. е. часть мощности «не успевает» рассеяться в элементарном объеме пространства с координатой z и «возвращается назад». Из-за экспоненциального множителя ($\exp(-2\alpha z)$) происходит уменьшение переносимой волной мощности, поэтому такую среду нельзя назвать прозрачной.

Дивергенция вектора Пойнтинга

$$\operatorname{div}\Pi=\frac{\partial\Pi_z}{\partial z}=-z_cH_0^2e^{-2\alpha z}[\alpha\cos\theta+|\gamma|\cos(2\,\omega t+$$

$$+\theta-2\,\beta z-\operatorname{arctg}\beta/\alpha)]. \quad (23)$$

Из этого выражения видно, что в среде с потерями отрицательная часть div П больше положительной, т. е. в каждом элементарном объеме происходит накопление энергии поля и превращение части этой энергии в тепло. Поэтому вытекающая из элементарного объема энергия меньше притекающей.

Видно, что изложенное отличается от представленного в соответствующей части статьи М. А. Панасенкова.

3. *Глубина проникновения.* Обычно этой величиной интересуются при исследовании поля в проводящей среде, при пренебрежении токами смещения. Однако можно рассмотреть и общий случай. Глубиной проникновения называют такую величину z_0, при которой амплитуда напряженности поля уменьшается в e раз, т. е.:

$$\alpha z_0=1,\ z_0=1/\alpha,$$

где α определяется по (13).

Отсюда

$$z_0=\frac{c}{\omega\sqrt{|\mu|\cdot|\varepsilon_э|}\,\sin\frac{\delta_\mu+\delta_{\varepsilon э}}{2}},$$

что отличается от (13) в статье М. А. Панасенкова. Замечу, что в статье М. А. Панасенкова в (13) входят комплексные μ и ε и, следовательно, глубина проникновения тоже комплексная величина?!

На этом следует остановиться и сделать вывод, что в статье М. А. Панасенкова неверно трактуются известные соотношения электродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аркадьев В. К.** Электромагнитные процессы в металлах. Ч. 2.— М.—Л.: ГНТИ, 1936.
2. **Поливанов К. М.** Теоретические основы электротехники в трех частях. Часть третья. Теория электромагнитного поля.— М.: Энергия, 1969.
3. **Конструкционные** и электротехнические материалы: Учебник для учащихся электротехнических специальных техникумов / В. Н. Бородулин, А. С. Воробьев, С. Я. Попов и др.; Под ред. В. А. Филипова.— М.: Высшая школа, 1990.
4. **Колли Я. Н., Поливанов К. М.** Ферритовая шайба в коаксиальной линии.— Изв. АН СССР, сер. физич., 1954, т. 18, № 3.

ПИЩИКОВ В. И., доктор техн. наук

Некоторые авторы, как и автор обсуждаемой статьи, предлагая свою интерпретацию симметрирования известных уравнений Максвелла, часто ссылаются на работы Аркадьева В. К., которые были опубликованы в начале века. Как известно, сложность вопроса вытекает из того факта, что в природе не обнаружены магнитные заряды, поэтому все попытки введения симметрирующего члена в одно из уравнений Максвелла, основываются на предположениях, что этот член может иметь физический («вязкость») или математический расчетный характер.

Остановимся более подробно на сути предложения Аркадьева В. К., наиболее полно изложенные им в книге «Электромагнитные процессы в металлах». 4.1 и 2,— М.—Л.: ОНТИ НКГП, 1936.

Уравнения Максвелла можно представить в следующем виде, используя международную систему единиц (СИ):

$$\operatorname{rot}\bar{H}=\sigma\bar{\mathbf{E}}+\varepsilon\frac{\partial\bar{\mathbf{E}}}{\partial t};$$

$$-\operatorname{rot}\bar{E}=\mu\frac{\partial\bar{\mathbf{H}}}{\partial t}.$$

В. К. Аркадьев предлагает второе уравнение рассматривать в следующей форме:

$$-\operatorname{rot}\bar{E}=\varphi\bar{H}+\mu\frac{\partial\bar{H}}{\partial t},$$

введя член $\varphi\bar{H}$, характеризующий «магнитную вязкость», потери на гистерезис и существующий только при наличии ферромагнитной среды.

Учет двух членов в уравнениях Максвелла, пропорциональных $\bar{E}$ и $\bar{H}$, является причиной появления комплексных диэлектрических и магнитных проницаемостей в ферромагнитной среде с учетом потерь в среде и токов проводимостей.

Некоторые формальные преобразования позволяют прояснить смысл введения комплексных проницаемостей. Представим, что напряженности электрического и магнитного полей изменяются по гармоническому закону с угловой частотой, равной ω:

$$\operatorname{rot}\dot{\bar{H}}=\sigma\dot{\bar{E}}+j\omega\varepsilon\dot{\bar{E}}. \quad (1)$$

Тогда

$$-\operatorname{rot}\dot{\bar{E}}=\varphi\dot{\bar{H}}+j\omega\mu\dot{\bar{H}},$$

где ε и μ — вещественные числа.

Введем вместо ε и μ их комплексные значения, которые определим так

$$\dot{\mu}=\dot{B}_m/\dot{H}_m=\mu e^{-j\psi_\mu}=\mu'+j\mu'',$$

где угол ψ_μ определяет потери энергии, связанные с перемагничиванием среды и магнитной вязкостью, и

$$\dot{\varepsilon}=\dot{D}_m/\dot{E}_m=\varepsilon e^{j\psi_\varepsilon}=\varepsilon'+j\varepsilon'',$$

где угол ψ_ε определяет потери энергии при изменении поляризации.

Тогда уравнения (1) можно записать в виде

$$\mathrm{rot}\,\dot{\bar{H}}=j\omega\tilde{\varepsilon}\dot{\bar{E}};$$
$$-\mathrm{rot}\,\dot{\bar{E}}=j\omega\tilde{\mu}\dot{\bar{H}}.$$

Значения $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ можно получить следующим образом:

$$\varphi+j\omega\dot{\mu}=\varphi+j\omega(\mu'-j\mu'')=\varphi+j\omega\mu'+\omega\mu''=j\omega[\mu'-$$
$$-j(\varphi/\omega+\mu'')]=j\omega\tilde{\mu};$$
$$\sigma+j\omega\dot{\varepsilon}=\sigma+j\omega(\varepsilon'-j\varepsilon'')=\sigma+j\omega\varepsilon'+\omega\varepsilon''=j\omega[\varepsilon'-$$
$$-j(\varepsilon''+\sigma/\omega)]=j\omega\tilde{\varepsilon}.$$

В итоге приходим к известной системе уравнений в комплексной форме, где вещественные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей заменены на комплексные. Можно показать, что все операции над этими уравнениями с комплексными проводимостями идентичны операциям с проводимостями, являющимися вещественными числами.

Необходимо учитывать, что в уравнениях Гельмгольца относительно векторных функций напряженностей электрического и магнитного полей

$$\nabla^2\dot{\bar{H}}+\tilde{k}^2\dot{\bar{H}}=0;$$
$$\nabla^2\dot{\bar{E}}+k^2\dot{\bar{E}}=0.$$

Коэффициент $\tilde{k}=k'-jk''$ является комплексным числом, элементарный анализ системы уравнений позволяет установить расчетные выражения для фазовой скорости и длины волны:

$$v=\omega/k';\ \lambda=2\pi/k'=v/f.$$

Можно показать, что выражение для дивергенции вектора Пойнтинга будет иметь следующий вид:

$$-\mathrm{div}\,[\dot{\bar{\mathbf{E}}}\times\hat{\bar{H}}]=\dot{\bar{E}}\,\mathrm{rot}\,\hat{\bar{H}}-\hat{\bar{H}}\,\mathrm{rot}\,\dot{\bar{E}}=\dot{\bar{E}}(-j\omega\hat{\varepsilon}\hat{\bar{E}})-$$
$$-\hat{\bar{H}}(-j\omega\tilde{\mu}\hat{\bar{H}})=(\sigma+\varepsilon''\omega)E^2+(\varphi+\mu''\omega)H^2+$$
$$+j\omega(-\varepsilon'E^2+\mu'H^2).$$

При вещественных значениях ε и μ в правой части уравнений исключаются φ и члены с ε'' и μ'', так как они равны нулю, т. е. исключаются потери, вызванные поляризацией, магнитной вязкостью и перемагничиванием.

Обращаясь к статье М. А. Панасенкова, хотелось бы отметить, что представление уравнений в форме

$$\mathrm{rot}\,\bar{H}=\varepsilon_1\Omega\bar{E}+\varepsilon_2\frac{\partial\bar{H}}{\partial t};$$

$$-\mathrm{rot}\,\bar{E}=\mu_1\Omega\bar{H}+\mu_2\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}$$

вызывает множество вопросов, на которые в статье нет четких ответов. Так, автор вводит новое значение частоты Ω, а не использует принятое значение угловой частоты, связанное известным соотношением с периодом гармонической функции $\omega=2\pi/T$.

Автор использует понятие комплексных переменных $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\mu}$, но ошибочно делает выводы о равенстве соотношений мнимых и действительных их частей, связывая это с «синхронностью» изменения как векторов **E** и **H**, так и векторов **D** и **B**. На самом деле, как уже указывалось ранее, углы ψ_μ и ψ_ε определяются из соотношений $\frac{\dot{B}}{\dot{H}}e^{-j\psi_\mu}$ и $\frac{\dot{D}}{\dot{E}}e^{-j\psi_\varepsilon}$ как $\mathrm{arctg}\,\frac{\mu''}{\mu'}=\psi_\mu$ и $\mathrm{arctg}\,\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}=\psi_\varepsilon$ и указывают на наличие потерь столь разнородных по своей физической сущности, что предположение автора об их равенстве является слишком смелым. Именно это предположение позволяет автору получить соотношения (9) и (10) и доказать, что реактивная мощность равна нулю в любой среде.

Записывая уравнения Максвелла по ферромагнитной среды с учетом потерь от токов проводимости в довольно своеобразной форме, автор переносит действие этих уравнений в вакуум, где загадочный радиус вихря a приобретает смысл радиуса орбит галактических тел. Вне космических пространств объяснить физическую суть радиуса световой угловой скорости Ω, как и само понятие световой угловой скорости, затруднительно. Попытка автора связать две угловые скорости Ω и ω на примере асинхронного двигателя не является доказательной и убедительной.

В самой статье очевидно показано, что рассмотрение планетарных вопросов никакого отношения к уравнениям Максвелла не имеет: предположение, что $\varkappa\gg1$ полностью исключает эту связь.

УДК 621.316.945:621.315:145.016.34.001.24

Защита от перегрузки по току проводов воздушных линий электропередачи

(статья Т. Е. Петровой и Е. П. Фигурнова, «Электричество», 1991, № 8)

НИКИТИНА Л. Г.

В процессе эксплуатации воздушных линий электропередачи нередко возникает необходимость повышать передаваемую мощность по сравнению с принятой при проектировании. Авторы обсуждаемой статьи связывают допустимую перегрузку проводов ВЛ с их термической прочностью, а для предупреждения возможности недопустимого перегрева рекомендуют оборудовать ВЛ соответствующей релейной защитой. Команду на отключение или разгрузку предлагается формировать при достижении определенной температуры провода с учетом термической статистической прочности металла проводов. Поскольку использование датчиков температуры, расположенных непосредственно на проводе, сопряжено с определенными трудностями, авторы предлагают в отдельных точках ВЛ располагать датчики температуры воздуха и скорости ветра, фиксировать